Ονοματεπώνυμο: ....

Μάθημα: ....

Υλη: ....

Επιμέλεια διαγωνίσματος: ....

Αξιολόγηση : ....

ΘΕΜΑ Α

Α1) Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f +g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ **(7 μονάδες)**

Α2) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά . **(4 μονάδες)**

Α3) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α , β] του πεδίου ορισμού της ;

(4 μονάδες)

Α4) Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

<< Κάθε συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό >>

α) Α ή Ψ **(1 μονάδα)** β) Αιτιολογήστε **(3 μονάδες)**

Α5) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) :

α) Κάθε οριζόντια ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow R$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

Β1) Να προσδιορίσετε την συνάρτηση fog. **(5 μονάδες)**

Β2) Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$ να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

α) $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$ β) $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ **(6 μονάδες)**

Β3) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της. **(7 μονάδες)**

Β4) Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, $x \in R$, να μελετήσετε την συνάρτηση φ ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της . **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + a, & x \leq 1 \end{cases}$

Γ1) Να υπολογίσετε το $\alpha \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής. **(4 μονάδες)**

Αν $\alpha = 1$:

Γ2) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 4]$.

(6 μονάδες)

Γ3) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4} \cdot x + 2021$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

(7 μονάδες)

Γ4) Ένα κινητό Μ κινείται κατα μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $0 < x < 1$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $y'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$.

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) + x^2 = 2x \cdot f(x) + \ln^2 x$, για κάθε $x \geq 1$, με $f(e) < e$.

Δ1) α) Να δείξετε ότι $f(e) = e-1$. **(2 μονάδες)**

β) Να δείξετε ότι η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(e, f(e))$ είναι ίση με $\frac{e-1}{e}$.

(4 μονάδες)

Δ2) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

(5 μονάδες)

Αν $f(x) = x-\ln x$, $x \geq 1$:

Δ3) α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **(2 μονάδες)**

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha > 0$ για τις οποίες

$$e^{a^2-a^3} < \frac{1+a^2}{1+a^3}.$$

(4 μονάδες)

Δ4) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, e^4)$ που να διέρχεται από το σημείο $B(1,0)$.

(8 μονάδες)

Καλή Επιτυχία